Mathematik von Menschen für Menschen – zum Facettenreichtum einer besonderen Wissenschaft

Reinhard Winkler (TU Wien)

Die wichtigsten Inhalte eines Vortrags vom 10.1.2019
im Rahmen des TU Forum Mathematik (TUForMath)

1 Einleitung

Mündlicher Vortrag und schriftlicher Text sind sehr unterschiedliche Medien. Entsprechend können die vorliegenden Blätter zwar die wichtigsten Inhalte meines Vortrags in komprimierter Form zusammenfassen, aber nicht alle Aspekte und Facetten, um deren Vermittlung ich mich bemühe, adäquat wiedergeben. Zum Beispiel möchte ich im mündlichen Vortrag, sofern die Zeit es zulässt, neben den beiden weiter unten zitierten kurzen Sentenzen von Immanuel Kant auch noch einige weitere bemerkenswerte Textpassagen vorlesen, und zwar von Robert Musil, Friedrich Nietzsche und Leonhard Euler.

Die schriftliche Zusammenfassung entspricht nicht in allen Einzelheiten jener des Vortrags. Sehr wohl ist das aber auf der obersten Gliederungsebene mit zwei Hauptteilen der Fall. Im ersten Teil möchte ich den Sinn der sieben Bestandteile des langen Vortragstitels erläutern, im zweiten Teil den für den Vortrag wichtigsten dieser Bestandteile genauer untersuchen: den Facettenreichtum – der sich seinerseits als außerordentlich facettenreich entpuppt.

Mit Fragen, Rückmeldungen (auch anonym möglich) und sonstigen Anliegen können Sie sich über die extra für solche Zwecke eingerichtete „Wunschbox“ unter

https://tuformath.at/wunschbox/

an das Team des TUForMath wenden. Mich persönlich erreichen Sie natürlich auch über meine e-mail-Adresse: reinhard.winkler@tuwien.ac.at

2 Erster Hauptteil: zum Vortragstitel

Der lange Vortragstitel verdient eine etwas genauere Erläuterung seiner Bestandteile. Eine solche soll nun folgen.

2.1 Mathematik

Was ist Mathematik? Im Gegensatz zu vielen anderen Wissenschaften (man denke Beispielsweise an die Biologie als Wissenschaft von den Organismen und deren Entstehung im Zuge der Evolution) ist Mathematik nach moderner Auffassung weniger durch ihren Gegenstand als durch ihre Methode bestimmt, siehe weiter unten zum Stichwort „einer besonderen“.

2.2 von Menschen

Da sich Mathematik nicht mit empirischen Objekten befasst, sondern mit deren Abstraktionen, wie sie vom menschlichen Geist kreiert werden, sagt sie mehr über intellektuelle Bedürfnisse und das Erkenntnisvermögen des Menschen aus, als dies die meisten anderen Wissenschaften tun. In diesem Sinne lässt sich die Mathematik in besonderem Maße als sowohl *von Menschen gemacht* wie auch *vom Menschen handelnd* begreifen.

2.3 für Menschen

Die TU Wien hat sich generell das Schlagwort „Technik für Menschen“ zum Motto gewählt. Im Falle der Mathematik bedeutet dies nicht nur, dass die Errungenschaften, die wir der modernen Technik und Naturwissenschaft verdanken, das Leben von Menschen angenehmer machen sollen. Die Mathematik gibt wegen ihrer Vielschichtigkeit und ihres Facettenreichtums auch Anlass zu Reflexionen unseres Erkenntnisvermögens, die einen wertvollen Beitrag zur Aufklärung und zu einer Existenz auf wacherem Bewusstseinsniveau ermöglichen.

2.4 zum

In einem einerseits thematisch derart breit angelegten, andererseits aber zeitlich auf etwa eine Stunde beschränkten Vortrag ist es nicht möglich, auch noch Mathematik selbst zu treiben. Nur Schlaglichter auf den behaupteten Facettenreichtum sind möglich. Somit ist der Vortrag als Wegweiser „zum“ Thema zu verstehen. Für Wünsche nach konkreten Vertiefungen darf nochmals an die Wunschbox erinnert werden (siehe Einleitung).

2.5 Facettenreichtum

Dieser erweist sich nicht nur hinsichtlich der Vielgestaltigkeit der Mathematik als solcher, sondern sogar hinsichtlich der Gesichtspunkte, unter denen der Facettenreichtum wahrgenommen werden kann. Eigentlich ist es also der „Facettenreichtum des Facettenreichtums der Mathematik“, der weiter unten im zweiten Hauptteil genauer unter die Lupe genommen wird.

2.6 einer besonderen

Wie schon eingangs angedeutet, zeichnet sich die Mathematik vor allem durch ihre Methode aus: die axiomatische, logisch-deduktive. Ein Aspekt dieser Methode ist die unbedingte Notwendigkeit, Widersprüche auszuräumen – etwa durch Klärung problematischer Begriffe. Dies unterscheidet die Mathematik aber noch nicht grundsätzlich von anderen Wissenschaften.

Ihre Besonderheit liegt darin, dass jedes mathematische Ergebnis (Theorem) *ausschließlich* mit den Mitteln des logisch folgerichtigen Schließens bewiesen werden muss. So können empirische Daten, die mit einer allgemeinen Behauptung im Einklang stehen, bestenfalls als Indiz für die Wahrheit dieser Behauptung und somit als Ermutigung gewertet werden, nach einem logisch zwingenden Beweis zu suchen. Aber kein Datenmaterial, und sei es noch so erdrückend, kann solch einen Beweis für eine mathematische Aussage mit Allgemeingültigkeitsanspruch ersetzen.

Als Konsequenz ist jedes mathematische Resultat für jeden Menschen grundsätzlich vollständig verstehbar. Das soll nicht heißen, dass der einzelne Mensch intellektuell allmächtig ist. Es bedeutet aber, dass mathematische Wahrheiten viel unmittelbarer einzusehen sind als empirische Gesetzmäßigkeiten. Das gilt insbesondere für Behauptungen, die auf schwer oder gar nicht wiederholbaren Beobachtungen anderer beruhen, die wir nicht kontrollieren können.

Weil logische Notwendigkeiten zeitlos sind, werden mathematische Wahrheiten niemals falsch, der Bestand an mathematischem Wissen nimmt also beständig zu. Neue Erkenntnisse werden aber nicht zusammenhanglos angehäuft, sondern finden im Zuge einer permanenten Evolution, Integration und Vereinheitlichung ihren Platz im sich beständig weiterentwickelnden Lehrgebäude.

Die Strenge der Methode hat noch eine andere bemerkenswerte Konsequenz. Indem sie nämlich mit einer radikalen Abstraktion einhergeht, lassen sich viele mathematische Begriffe auf extrem unterschiedliche reale und auch hypothetische Situationen anwenden. So wird die Mathematik zur universellen Wissenschaft alles Denkmöglichen – die idealtypische Verwirklichung von Musils „Möglichkeitssinn".

Dass die mathematische Methode (genauer: die Prädikatenlogik erster Stufe) wirklich alles leistet, was wir uns sinnvoll von ihr wünschen können, lässt sich aus dem Vollständigkeitssatz von Kurt Gödel aus dem Jahr 1930 herauslesen. Dass derselbe Kurt Gödel nur wenig später seinen noch berühmteren Unvollständigkeitssatz nachreichte, dem zufolge trotzdem nicht alle mathematischen Wahrheiten innerhalb eines (vernünftigen) formalen Systems bewiesen werden können, widerspricht dem nicht. Es gibt aber Anlass, sehr sorgfältig zu analysieren, was genau Vollständigkeits- und Unvollständigkeitssatz bedeuten. Das ist allerdings nicht Hauptgegenstand dieses Vortrags, sondern war in dieser Vortragsreihe schon am 6.12.2018 Inhalt des Vortrags mit dem Titel „Wahrheit und Beweis" von Matthias Baaz.

2.7 Wissenschaft

„Ich behaupte aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist." Dieses Zitat stammt von Immanuel Kant. Auch wenn man dieser Behauptung Kants (heutzutage) schwer uneingeschränkt zustimmen kann, so ist sie doch ein Indiz dafür, wie weit und vielgestaltig die Mathematik den gesamten Kosmos der Wissenschaften durchzieht. Die nun folgende Behandlung ihres Facettenreichtums möge davon einen Eindruck geben.

3 Zweiter Hauptteil: einige Facetten des Facettenreichtums der Mathematik

3.1 Teilgebiete

In der Mathematik unterscheidet man zahlreiche größere, kleinere und sehr kleine Teilgebiete, die trotz der methodischen Einheitlichkeit sehr unterschiedliche Aura haben können. Zur systematischen Erfassung wird in der Fachliteratur meist die Klassifikation der AMS (American Mathematical Society) zugrunde gelegt. Diese enthält drei Gliederungsebenen, die sich in einem fünfstelligen Code niederschlagen: zwei Stellen für Ziffern auf der obersten Ebene, eine für einen Buchstaben für die mittlere und wieder zwei Stellen für Ziffern für die unterste Gliederungsebene. Beispielsweise steht im Code 55Q52 die 55 für das relativ große Gebiet „Algebraische Topologie", Q für die der Algebraischen Topologie zuzuordnende „Homotopietheorie" und 52 für „Homotopiegruppen spezieller Räume". Von den insgesamt $100 \times 26 \times 100 = 260000$ möglichen Codes sind immerhin etwa 6000 auch tatsächlich für (meist sehr kleine) Spezialgebiete vergeben.

Im genannten Beispiel wird deutlich, dass es eigentlich die inneren Querverbindungen sind, die die Mathematik so reichhaltig machen. Denn sowohl Algebra als auch Topologie sind sehr fundamentale und große Gebiete, die in der Algebraischen Topologie eine ganz bestimmte Art von Verbindung eingehen. Und diese unterscheidet sich z.B. sehr von der Topologischen Algebra, die gleichfalls eine bestimmte, aber eben andersartige Verbindung von Algebra und Topologie darstellt. Auch die meisten kleineren und kleinsten Teilgebiete der Mathematik sind durch ein sehr spezifisches Zusammenwirken größerer, fundamentalerer Gebiete gekennzeichnet.

3.2 Anwendungen

Zwar war die Mathematik schon in frühen Kulturen von praktischen Bedürfnissen geprägt, doch entfaltete sich das heute unermesslich breite Spektrum mathematischer Anwendungen erst im Gefolge der wissenschaftlichen Revolution der Neuzeit. Lange Zeit war die Physik weitgehend der einzige Impulsgeber. Erst im 20.Jahrhundert zeigte sich – nicht zuletzt Dank des geschärften Blickes auf die Grundlagen der Mathematik – wie flexibel ihre abstrakten Konzepte auf unterschiedlichste Bereiche angewandt werden können. Heute kommen weder Natur-, noch Sozial-, Wirtschafts- und Humanwissenschaften und erst recht nicht Technik aller Ausrichtungen ohne mathematische Methodik aus. Auch in vielen Sparten der Kunst bedient man sich mathematischer Konzepte. Ich darf im Zusammenhang mit Anwendungen, in denen Mathematik eine wichtige, wenn auch oft verdeckte Rolle spielt, auch auf die „Mathematics undercover“-Vorträge im TUForMath hinweisen.

3.3 interdisziplinär

Von den Anwendungen, wo mathematische Methoden zur Lösung unterschiedlichster, meist praktischer Aufgaben außerhalb der Mathematik eingesetzt werden, möchte ich Interdisziplinarität dadurch unterscheiden, dass letztere nicht nur im Einsatz von Mathematik als Instrument, sondern in einer Wechselwirkung zwischen zwei oder mehreren Disziplinen zum Vorteil aller Beteiligten besteht. Exemplarisch dafür ist das epochale Werk Isaac Newtons, in dem Mathematik und Physik durch ihr Zusammenspiel beide auf ein neues Niveau gehoben wurden. Als Beispiel aus dem 20. Jahrhundert ist die Spieltheorie zu nennen, die als Verbindung ökonomischen mit mathematischen Denkens beide Disziplinen auch jeweils für sich alleine betrachtet bereichert hat. Noch jünger sind die gegenseitigen Befruchtungen zwischen Mathematik und Computerwissenschaften, viel älter wiederum, nämlich auf die griechische Antike zurückgehend, die Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Philosophie oder zwischen Mathematik und Musik. Unschwer ließen sich weitere Beispiele finden.

3.4 historisch

Anders als Theorien aus empirischen Wissenschaften, über denen stets das drohende Damoklesschwert der Falsifikation schwebt, werden einmal korrekte mathematische Ideen nie falsch. Was jedoch häufig geschieht, ist die Integration alter Resultate in einen neuen, umfassenderen Kontext, in dem sie besser und ökonomischer verstanden werden können. Deshalb gibt es in der Mathematik keine Umwälzungen im Sinne einer alles niederreißenden Revolution, sondern beständiges Wachstum und Ausdifferenzierung im Sinne einer Evolution. Markante historische Epochen zeichnen sich daher weniger durch das Verwerfen alter Ideen als durch die Integration neuer Aspekte dessen aus, was unter „Mathematik“ verstanden wird.

Beispiele dazu: Alte Zivilisationen – weitgehend unsystematisches Sammelsurium von Fertigkeiten, Techniken, Erkenntnissen etc.; klassische Antike – systematische und beweisende Wissenschaft; Mittelalter – Tradierung und Ergänzung antiken Wissens vor allem im Orient; frühe Neuzeit – Mathematisierung der Naturbeschreibung; 19.Jahrhundert – Vertiefung durch Abstraktion und Emanzipation der Mathematik von den Naturwissenschaften (nichteuklidische Geometrie, Gruppenbegriff, Erlanger Programm); um 1900 – Grundlagen (Begriffsklärungen wie z.B. Grenzwert, Entfaltung der modernen Logik und Mengenlehre, Hilbertsches Programm, die axiomatische Methode setzt sich durch, Gödels Sätze); um 1950 – Mathematik als Strukturtheorie (Bourbaki); jüngste Vergangenheit und Gegenwart – Auswirkungen auf und durch den Computer (Diskrete Mathematik, Numerik, Big Data-Statistik).

3.5 Lehrplan

Folgende sechs Aspekte der Mathematik werden im allgemeinen Teil des österreichischen Lehrplans für AHS-Oberstufe auf sehr überzeugende Weise beschrieben und als Bildungsziele definiert: schöpferisch-kreativ, sprachlich, erkenntnistheoretisch, pragmatisch-anwendungsorientiert, autonom, kulturell-historisch. (Wie steht es mit der Umsetzung im Unterricht?)

3.6 individuell

Die Motivation, Mathematik zu betreiben, kann individuell sehr unterschiedlich sein. Es folgt ein Vorschlag, solche Unterschiede durch Schlagworte zu fassen. Natürlich hat die Entfaltung der Mathematik derartige Klassifikationen nicht nötig. Sie können aber das Bewusstsein dafür fördern, dass bei der Vermittlung von Mathematik gegenüber verschiedenen Menschen sehr unterschiedliche Ansätze zielführend sein können.

Und zwar scheint mir die Unterscheidung sinnvoll, ob man mittels Mathematik die Welt verstehen (Naturwissenschaften, wissenschaftliche Ökonomie), gestalten (Technik, Wirtschaft, Politik) oder reflektieren (reine Mathematik, Philosophie/Erkenntnistheorie, Kunst) möchte. Viele Mathematiker agieren auch aus einer sportlichen Mentalität heraus und erfreuen sich am Wettbewerb bei der Lösung mathematischer Probleme. Eine verantwortungsbewusste Förderung der Mathematik in Bildungs- und Forschungsinstitutionen durch öffentliche Gelder wird freilich vor allem die ersten drei der genannten Motivationen im Auge haben.

3.7 Betrachtungsweise

In der Praxis des Mathematikunterrichts an Schulen und teilweise auch an Universitäten liegt der Fokus trotz höherer Bildungsabsichten (siehe auch Lehrplan weiter oben) oftmals stark auf der Beherrschung elementarer Fertigkeiten beim Rechnen und (schon deutlich seltener) bei einfachen logischen Schlussweisen. Mathematik auf dieser untersten, vorwiegend unmittelbar methodischen Ebene wahrzunehmen, nenne ich die mikroskopische Betrachtungsweise.

Hat man dagegen große Teilgebiete, ideengeschichtliche Zusammenhänge und historische Entwicklungen sowie Verbindungen zu anderen Disziplinen im Auge, so spreche ich von der makroskopischen Betrachtungsweise. Diese erfreut sich mit gutem Grunde großer Beliebtheit bei Versuchen wie dem des TUForMath, Mathematik zu popularisieren.

Zwischen mikro- und makroskopischer Betrachtungsweise gibt es aber noch eine weitere, die ich folglich die mesoskopische nenne. Auf mesoskopischer Ebene spielt sich der Transfer mathematischer Ideen ab, die wichtiger sind als elementare Rechenoperationen, aber immer noch überschaubar für das geistige Auge von Fachmann oder Fachfrau. Meist ist es dieser

Ideentransfer, weshalb Mathematik von denen, die sie lieben, als so spannend empfunden wird. Gute fachwissenschaftliche Vorträge bewegen sich typischerweise vorwiegend im mesoskopischen Bereich. Oft muss dafür erst ein begrifflicher Rahmen geschaffen werden. Das kann beträchtlichen zeitlichen wie auch intellektuellen Aufwand erfordern – sowohl bei Lehrenden als auch bei Lernenden. Deshalb ist die mesoskopische Betrachtungsweise sicherlich schwieriger zu vermitteln als die mikro- und makroskopische.

3.8 Antagonismen

Mathematik hat bei vielen Laien den Ruf einer Wissenschaft, wo vor allem Disziplin, Strenge, Trocken- und Unfreiheit herrschen. Und tatsächlich ist die Methode der Mathematik dort, wo es um den Beweis von Theoremen geht, eine sehr strenge. Doch ist das nur ein kleiner Ausschnitt aus der gesamten mathematischen Wirklichkeit. Denn erstens geht dem Beweisen meist ein Suchen voraus, das vor allem Fantasie und originelles Denken verlangt. Und zweitens erzeugt gerade die methodische Strenge eine unglaubliche Freiheit, was den Gegenstand mathematischer Überlegungen betrifft. Die Ausweitung mathematischen Denkens auf die unterschiedlichsten Anwendungsbereiche zeugt von dieser Freiheit.

Diese beiden Antipoden, Strenge und Freiheit, spiegeln sich in zahlreichen Antagonismen wider, die an der Mathematik zu beobachten sind. Stets trägt erst das Wechselspiel beider, das weit mehr ist als die Summe der Teile, reiche Früchte. Als paradigmatisch dafür mag das berühmte Diktum Kants gelten: „Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind.“ Ich möchte einige solche Antagonismen hervorheben: logisch – intuitiv, abstrakt – konkret, konzeptuell/platonistisch – operational/algorithmisch/konstruktiv, allgemein – exemplarisch, (methodisch) streng – (inhaltlich) frei, subjektives Bewusstsein – objektivierbare Begrifflichkeit. Von etwas anderer Art sind die genuin mathematischen Gegensatzpaare diskret – kontinuierlich, qualitativ – quantitativ, endlich – unendlich, deterministisch – probabilistisch. Wieder von anderer Natur sind Antagonismen hart+absolut (Wahrheit) – flexibel+relativ (formale Systeme und Begriffe können an die zu beschreibende Wirklichkeit angepasst werden), Facettenreichtum – Einheitlichkeit/Ganzheit, objektive Gültigkeit – subjektive Bewertung, einsam (bezogen auf den mathematischen Forscher) – kollektiv (als Kulturleistung und historische Errungenschaft).

3.9 ästhetisch

Schönheit wird in der Mathematik nicht als äußeres Merkmal, sondern als substanzielles Qualitätskriterium empfunden. Das liegt vor allem daran, dass eine wesentliche Aufgabe der Mathematik darin besteht, adäquate Begriffe so zu bilden, dass sie unseren Denkmöglichkeiten entgegenkommen. Wie weit dies gelingt, bemisst sich nicht zuletzt an einer Ähnlichkeit von (subjektiver) Intuition und (objektiver) formaler Realisierung. Diesbezügliche Übereinstimmung – so meine These – wird nicht nur als stimmig, sondern auch als schön empfunden.

Angesichts dessen und auch des Facettenreichtums der Mathematik wird mein Resümee nicht überraschen: Mathematik ist nicht nur schön für diejenigen, die sie lieben (so wie Biertrinken schön für diejenigen ist, die das Biertrinken lieben), sondern sie ist mannigfacher Qualitäten von Schönheit fähig. Sie kann beispielsweise durch Ausgeklügeltheit gefallen, durch Klarheit, Konsequenz, Originalität, Erhabenheit etc. Dabei kann ihre Wirkung auf verschiedene Personen sehr unterschiedlich sein, denn Geschmäcker sind bekanntlich verschieden. Vergleiche mit der Kunst liegen auf der Hand!